МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
уравнений в частных производных
и теории вероятностей

А.В. Глушко
25.05.23

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.В.07 Асимптотики решений дифференциальных уравнений

1. Код и наименование направления подготовки:
01.04.01 Математика

2. Профиль подготовки: Математические модели гидродинамики

3. Квалификация выпускника: Магистр

4. Форма обучения: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей

6. Составители программы: Логинова Екатерина Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент

7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета 25.05.2023 Протокол № 0500-06

8. Учебный год: 2024/2025 **Семестр(-ы):** 4

9. Цели и задачи учебной дисциплины: Целью освоения учебной дисциплины «Асимптотики решений дифференциальных уравнений» является:

- ознакомление обучающихся с методами построения асимптотических решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задачи дисциплины:

- изучить основные методы построения асимптотических решений обыкновенных дифференциальных уравнений для задач математической физики, описывающих различные процессы механической природы;
- овладеть основами применения методов построения асимптотических решений обыкновенных дифференциальных уравнений в изучении реальных процессов и объектов с целью нахождения решений общенаучных и прикладных задач широкого профиля;
- овладеть современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в разнообразных приложениях.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Блок 1. Часть, формируемая участниками образовательных отношений.

Приступая к изучению данной дисциплины, обучающийся должен иметь теоретическую и практическую подготовку по математическому анализу, обладать полными знаниями курса обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-1	Способен решать задачи аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач математической гидродинамики	ПК-1.1	Обладает большим объемом знаний в области математической гидродинамики	Знать: основные задачи в области обыкновенных дифференциальных уравнений, используемые при анализе задач для уравнений с частными производными, описывающими различные процессы гидродинамики Уметь: использовать фундаментальные знания в построении и исследовании решений обыкновенных дифференциальных уравнений Владеть: методами математического моделирования при анализе математических моделей физических и механических задач для их дальнейшего применения
		ПК-1.2	Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-	Знать: структуру научно-исследовательских работ, основы научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики Уметь: определять тематику научного исследования Владеть: методами научного

			исследовательской деятельности в области математической гидродинамики	исследования
		ПК-1.3	Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики	Знать: методы математического моделирования при анализе прикладных задач гидродинамики для их дальнейшего использования на практике Уметь: представить собственные новые научные результаты Владеть: различными способами построения асимптотик решений уравнений гидродинамики
ПКВ-3	Способен осуществлять теоретическое обобщение научных данных и результатов экспериментов в моделях математической гидродинамики	ПКВ-3.1	Обладает теоретическим аппаратом, необходимым для обобщения научных данных и результатов экспериментов в моделях математической гидродинамики	Знать: современные методы анализа дифференциальных уравнений, в том числе уравнений в частных производных и уравнений математической физики Уметь: определять тематику научного исследования Владеть: современными методами научного анализа моделей математической гидродинамики
		ПКВ-3.2	Умеет структурировать и обобщать научные и экспериментальные данные, четко формулировать и излагать необходимую информацию	Знать: современные методы проведения научных экспериментов, подходы к анализу научно-исследовательских работ, Уметь: анализировать полученные результаты экспериментов, делать оптимально верные выводы и рекомендации Владеть: современными методами научного анализа
		ПКВ-3.3	Имеет практический опыт обобщения подобной информации	Знать: существующие методы решения прикладных задач гидродинамики применительно к практической сфере деятельности Уметь: оценивать различные подходы к решению прикладных задач гидродинамики, применять выбранный метод Владеть: современными методами прикладного научного анализа

12.Объем дисциплины в зачетных единицах/часах — ___3 / __108___.

Форма промежуточной аттестации _________зачет________

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Виды учебной работы	Трудоемкость	
	Всего	По семестрам

		4
Аудиторные занятия	50	50
В том числе: лекции	20	20
практические	30	30
лабораторные		
Самостоятельная работа	58	58
Форма промежуточной аттестации	зачет	зачет
Итого:	108	108

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК*
1. Лекции			
1.1	Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка	Эвристические соображения. Основные оценки метода ВКБ. Асимптотика решений при больших значениях аргумента Асимптотика решений при больших значениях параметра	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=27281
1.2	Теория возмущений. Некоторые методы построения локальных асимптотических разложений	Регулярная теория возмущений. Точное решение уравнения Дюффинга. Метод Линдштедта-Пуанкаре, пример решения автономного уравнения второго порядка со слабой нелинейностью общего вида. Метод Крылова-Боголюбова, изучение колебаний, амплитуда которых меняется со временем. Метод усреднения. Поведение решения задачи Коши для неавтономного уравнения со слабой нелинейностью при ε ->0 на большом интервале времени порядка ε^{-1}...	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=27281
1.3	Применение и трактовка метода ВКБ	Постановка задачи для дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной, $\varepsilon d^2y/dx^2+V(x)y=0$. Примеры моделей математической физики, которые приводят такому типу уравнений. Схема метода ВКБ, два случая: V(x)>0 и V(x)<0.Задача на собственные значения для уравнения без точек поворота. Асимптотическое решение краевой задачи для уравнения без точек поворота с граничными условиями $y(0,\varepsilon)=A, y(1,\varepsilon)=B$.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=27281

		Задача рассеяния	
2. Практические занятия			
2.1	Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка	Эвристические соображения. Основные оценки метода ВКБ. Асимптотика решений при больших значениях аргумента Асимптотика решений при больших значениях параметра	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=27281
2.2	Теория возмущений. Некоторые методы построения локальных асимптотических разложений	Регулярная теория возмущений. Точное решение уравнения Дюффинга. Метод Линдштедта-Пуанкаре, пример решения автономного уравнения второго порядка со слабой нелинейностью общего вида. Метод Крылова-Боголюбова, изучение колебаний, амплитуда которых меняется со временем. Метод усреднения. Поведение решения задачи Коши для неавтономного уравнения со слабой нелинейностью при ε ->0 на большом интервале времени порядка ε^{-1}...	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=27281
2.3	Применение и трактовка метода ВКБ.	Постановка задачи для дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной, $\varepsilon d^2y/dx^2 + V(x)y = 0$. Примеры моделей математической физики, которые приводят такому типу уравнений. Схема метода ВКБ, два случая: V(x)>0 и V(x)<0.Задача на собственные значения для уравнения без точек поворота. Асимптотическое решение краевой задачи для уравнения без точек поворота с граничными условиями $y(0,\varepsilon) = A, y(1,\varepsilon) = B$. Задача рассеяния. Контрольная работа	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=27281

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка.	8	12		20	40
2	Теория возмущений. Некоторые методы построения локальных асимптотических разложений	6	8		18	32
3	Применение и трактовка метода ВКБ.	6	10		20	36

	Итого:	20	30		58	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся, на которую отводится 58 часов. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Асимптотики решений дифференциальных уравнений» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекций обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

3. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке.

Знание методов моделирования анализа задач гидродинамических процессов может существенно помочь при анализе дифференциальных уравнений гидродинамического типа, которые изучаются в целом ряде направлений современной математики.

Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и ресурсами сети Internet, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся заинтересованное отношение к конкретной проблеме.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Асимптотики решений дифференциальных уравнений» предполагает изучение рекомендуемой преподавателем литературы по вопросам практических занятий, самостоятельное освоение понятийного аппарата, выполнение домашних заданий и подготовку к текущим аттестациям.

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятиям, обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Выполняемые студентами самостоятельно задания подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации.

Кроме курса в системе «Электронный университет» учебно-методические материалы, рекомендуемые к использованию для лучшего усвоения курса размещены на сайте кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей http//:www.kuchp.ru.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины *(список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)*

а) основная литература:

№ п/п	Источник
01	*Карчевский, М. М. Лекции по уравнениям математической физики / М. М. Карчевский. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 164 с. — ISBN 978-5-507-46827-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/321200. — Режим доступа: для авториз. пользователей.*
02	*Шалаумов, В. А. Асимптотические методы в анализе : учебное пособие / В. А. Шалаумов. — Кемерово : КемГУ, 2012. — 88 с. — ISBN 978-5-8353-1267-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/44410. — Режим доступа: для авториз. пользователей.*

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
03	*Глушко А.В. Асимптотики решений дифференциальных уравнений / А.В. Глушко, В.П. Глушко. – Воронеж, 2002. – № 185. – 44 с.*
04	*Найфэ А. Введение в методы возмущений / А. Найфе. – М. : Мир, 1984. – 535 с.*
05	*Вайнберг Б.Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики / Б.Р.Вайнберг. – М. : МГУ, 1982. – 296 с.*
06	*Глушко, А.В. Асимптотические методы в задачах гидродинамики / А.В.Глушко .— Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2003 .— 300 с.*

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
07	*http://eqworld.ipmnet.ru – интернет-портал, посвященный уравнениям и методам их решений*
08	*http://www.lib.vsu.ru - электронный каталог ЗНБ ВГУ*
09	*http://www.kuchp.ru – электронный сайт кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, на котором размещены методические издания*

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	http://www.kuchp.ru – электронный сайт кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, на котором размещены методические издания
2	htth://mschool.kubsu.ru – библиотека электронных учебных пособий.(http://mschool.kubsu.ru/ms/1.htm)
3	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – (http: // www.lib.vsu.ru/)

17. Образовательные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=27281).

Перечень необходимого программного обеспечения: Microsoft Windows 10, LibreOffice 6 (*Writer (текстовый процессор), Calc (электронные таблицы), Impress (презентации), Draw (векторная графика), Base (база данных), Math (редактор формул)*), MATLAB, Gimp, WinDjView, Foxit Reader, 7-Zip, Mozilla Firefox.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Специализированная мебель.

Для проведения лекционных и практических занятий используются аудитории, соответствующие действующим санитарно-техническим нормам и противопожарным правилам.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети Internet и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ВГУ.

При реализации дисциплины с использованием дистанционного образования возможны дополнения материально-технического обеспечения дисциплины.

19. Оценочные средства для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка.	ПК – 1 ПКВ-3	ПК - 1.1 ПК – 1.2 ПК – 1.3 ПКВ - 3.1 ПКВ - 3.2 ПКВ - 3.3	Контрольная работа
2.	Теория возмущений. Некоторые методы построения локальных асимптотических разложений	ПК – 1 ПКВ-3	ПК - 1.1 ПК – 1.2 ПК – 1.3 ПКВ - 3.1 ПКВ - 3.2 ПКВ - 3.3	Контрольная работа
3.	Применение и трактовка метода ВКБ.	ПК – 1 ПКВ-3	ПК - 1.1 ПК – 1.2 ПК – 1.3 ПКВ - 3.1 ПКВ - 3.2 ПКВ - 3.3	Контрольная работа

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет с оценкой				Перечень вопросов к зачету, перечень тестовых заданий к зачету

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: контрольная работа

Пример контрольной работы:

1. Заполните пропуски.

Теорема 2. Пусть $k>0$ - постоянная, функция $V(x)$ непрерывна при $x \geq 0$ и выполнено условие

$$\int_0^\infty |V(x)|\,dx < \infty. \tag{1}$$

Тогда уравнение

$$y'' + (k^2 - \_\_\_\_)y = 0. \tag{2}$$

имеет линейно независимые решения вида

$$y_{1,2}(x) \sim \_\_\_\_ \quad (x \to \infty). \tag{3}$$

Доказательство. Представим уравнение в виде $y'' + k^2 y = V(x)y$ и решим его, считая правую часть ____________ функцией. Тогда получим интегральное уравнение

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{ikx} + C_2 \mathrm{e}^{-ikx} + \frac{1}{k}\int_x^\infty \sin[k(x-t)] V(t) y(t)\,dt\,. \tag{4}$$

Положим $C_1 = 1, C_2 = \_\_\_\_$ и применим метод последовательных приближений:

$$y_0(x) = \mathrm{e}^{ikx},\; y_{n+1}(x) = \_\_\_\_ + \frac{1}{k}\int_x^\infty \sin[k(x-t)] V(y) y_n(t)\,dt.$$

Докажем по индукции оценку $|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \dfrac{\Phi^n(x)}{n!}$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{k}\int_x^{\_\_} |V(t)|\,dt.$

При $n=1$ имеем $|y_1(x) - y_0(x)| \leq \dfrac{1}{k}\int_0^\infty |\_\_\_\_\_|\,dt = \Phi(x).$ Совершим переход от n к $n+1$. Имеем

$$| y_{n+1}(x) - y_n(x) | \le \frac{1}{k}\int_x^{\infty} | \_\_\_\_\_\_ \| V(t) \| y_n(t) - y_{n-1}(t) | dt \le$$

$$\le \frac{1}{n!}\int_x^{\infty} \Phi^n(t) \frac{1}{k} | V(t) | dt = \frac{\Phi^{n+1}(x)}{(n+1)!},$$

так как $|V(t)|dt = k\,d\Phi(t).$ Следовательно,

$$| y(x) |=| y_0(x) + (y_1(x) - y_0(x)) + ... + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + ... | \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi^n(x)}{n!} \le \_\_\_\_\_,$$

и поэтому последовательность $y_n(x)$ равномерно сходится к функции $y(x)$ на полуоси $x \ge 0$. Так как, по доказанному, функция $y(x)$ ____________, то из (4) находим $| y(x) - e^{ikx} | \le \int_x^{\infty} | V(t) | dt$. Правая часть этого неравенства стремится к _________ при $x \to +\infty$, в силу условия (1), и решение $y_1(x)$ построено. Аналогично строится решение $y_2(x)$.

Допустим, что эти решения линейно зависимы, тогда $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \equiv$ ____ при $x \ge 0$. Если $c_1 \ne 0$, то $y_1(x) / y_2(x) \equiv -c_2 / c_1$. Но из (3) следует, что $y_1(x) / y_2(x) \sim$ ______ $(x \to \infty)$, так что $e^{ikx} \sim -c_2 / c_1 \quad (x \to \infty)$. Это невозможно, так как предел левой части этого равенства при $x \to \infty$ не существует.

Описание технологии проведения

В ходе контрольной работы обучающемуся выдается КИМ с заданием, которое необходимо выполнить. Контрольная работа представляет собой текст утверждения с пропущенными словами/символами/формулами/фразами, которые необходимо вписать обучающемуся Ограничение по времени – 40 минут. Во время контрольной работы не разрешено пользоваться никакими справочными материалами.

Текущая аттестация по дисциплине с применением дистанционных образовательных технологий может проводиться на образовательном портале «Электронный университет ВГУ» (LMS Moodle, https://edu.vsu.ru/).

Требования к выполнению заданий (или шкалы и критерии оценивания)

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено», «не зачтено», которые формируются следующим образом:

Оценки	Критерии
Зачтено	Обучающийся правильно выполнил не менее 50% предложенных заданий.
Не зачтено	Обучающийся правильно выполнил менее 50% предложенных заданий.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: перечень тестовых заданий к зачету, перечень вопросов к зачету.

Перечень вопросов к зачету:

1	Эвристические соображения. Основные оценки метода ВКБ.
2	Асимптотика решений при больших значениях параметра..
3	Осциллирующие решения, теорема об асимптотиках линейно независимых решений.
4	Неосциллирующие решения,теорема об асимптотиках линейно независимых решений.
5	Регулярная теория возмущений.
6	Точное решение уравнения Дюффинга.
7	Метод Линдштедта-Пуанкаре,
8	Пример решения автономного уравнения второго порядка со слабой нелинейностью общего вида.
9	Метод Крылова-Боголюбова, изучение колебаний, амплитуда которых меняется со временем.
10	Метод усреднения.
11	Поведение решения задачи Коши для неавтономного уравнения со слабой нелинейностью при ε ->0 на большом интервале времени порядка ε^{-1}...
12	Постановка задачи для дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной, $\varepsilon\, d^2 y / dx^2 + V(x) y = 0$.
13	Примеры моделей математической физики, которые приводят такому типу уравнений.
14	Задача на собственные значения для уравнения без точек поворота.
15	Асимптотическое решение краевой задачи для уравнения без точек поворота с граничными условиями $y(0,\varepsilon) = A, y(1,\varepsilon) = B$.
16	Задача рассеяния

Примеры тестовых заданий к зачету

1. Метод Линдштедта - Пуанкаре для задачи

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)x, \quad x(0) = a, \dot{x}(0) = 0$$

дает следующий результат:

1) $x(t,\varepsilon) = a\cos\tau + O(\varepsilon^2),$

2) $x(t,\varepsilon) = a\cos\tau - O(\varepsilon^2),$

3) $x(t,\varepsilon) = a\cos\tau + \dfrac{\varepsilon a^3}{32}(\cos 3\tau - \cos\tau) + O(\varepsilon^2),$

где $\tau = t(1 - \dfrac{4-3a^2}{8}\varepsilon + O(\varepsilon^2)),\ T = 2\pi + \dfrac{(4-3a^2)\pi}{4}\varepsilon + O(\varepsilon^2).$

Указать правильный ответ.

2. Метод Линдштедта - Пуанкаре для задачи $\ddot{x} + x = \varepsilon(\dot{x} + \dfrac{1}{3}\dot{x}^3),\ x(0) = a, \dot{x}(0) = 0$ дает следующий результат:

1) $x(t,\varepsilon) = 2\cos\tau + O(\varepsilon^2)$,

2) $x(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$,

3) $x(t,\varepsilon) = 2\cos\tau + \dfrac{\varepsilon}{12}(3\sin\tau - \sin 3\tau) + O(\varepsilon^2)$,

где $\tau = t(1 + O(\varepsilon^2)),\ T = 2\pi + O(\varepsilon^2).$

Указать правильный ответ.

3. Метод Линдштедта - Пуанкаре для задачи $\ddot{x}+x=\varepsilon x^2, \quad x(0)=a, \ \dot{x}(0)=0$ дает следующий результат:

1) $x(t,\varepsilon)=a\cos\tau+O(\varepsilon^2),$

2) $x(t,\varepsilon)=a\cos\tau+\dfrac{\varepsilon a^2}{6}(3+2\cos\tau-\cos2\tau)+O(\varepsilon^2),$

3) $x(t,\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon a^2}{6}(3+2\cos\tau-\cos2\tau)+O(\varepsilon^2),$

где $\tau=t(1+O(\varepsilon^2)),\ T=2\pi+O(\varepsilon^2).$

Указать правильный ответ.

4. Асимптотика решений уравнения $y''+xy'+k^2x^2y=0$ на отрезке $I=[a;b]$ при $k\to+\infty$ имеет вид

Варианты ответов:

1) $y_{1,2}=(k^2x^4+\dfrac{3}{2x^3}-\dfrac{1}{4x^4})^{-\frac{1}{4}}\sin t$,

2) $y_{1,2}=(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{4}+k^2x^2)^{-\frac{1}{4}}\exp\{-\dfrac{x^2}{4}\pm i\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{t^2}{4}+k^2t^2dt}\}[1+\dfrac{\varepsilon_{1,2}(x,k)}{k}]$,

3) $y_{1,2}=(k^2x^4+\dfrac{3}{2x^3}-\dfrac{1}{4x^4})^{-\frac{1}{4}}\cos t.$,

Указать правильный ответ.

5. Какая замена используется для приведения уравнения $y''+\dfrac{1}{x^2}y'+k^2x^4y=0$ к виду $u''\pm Q(x)y=0$.

Варианты ответов:

1) $y(x)=u(x)e^{f(x)}+f(x)e^{u(x)}$

2) $y(x)=u(x)e^{f(x)}$

3) $y(x)=e^{u(x)-f(x)}$

4) $y(x)=e^{u(x)+f(x)}$

Указать правильный ответ.

6. Вставьте пропущенное существительное в родительном падеже
Метод приближенного решения задач теоретической физики, применимый в том случае, когда в задаче присутствует малый параметр, причём в пренебрежении этим параметром задача имеет точное решение, называется теорией __________.

7. Решение уравнения $y''-xy=0$, имеющее вид

$$\mathrm{Ai}(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}x^{-1/4}\exp[-(2/3)x^{2/3}][1+O(x^{-3/2})]$$

Называется функцией ________ (впишите фамилию ученого с заглавной буквы).

8. Уравнение $y''+(x^2-a^2)y=0, \ a\ge0$ называется уравнением __________ (впишите фамилию ученого с заглавной буквы в родительном падеже).

9. Уравнение $y'' + y - 2\varepsilon y^3 = 0$, где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, характеризующий степень нелинейности системы, называется уравнением ________ (впишите фамилию ученого с заглавной буквы в родительном падеже).

10. Уравнение $y'' + y = \varepsilon(1 - y^2)y'$, которое возникает при изучении автоколебательных систем, называют уравнением Ван-дер- ____ (впишите оставшуюся часть фамилии ученого с заглавной буквы в родительном падеже).

Пример КИМ зачет

Контрольно-измерительный материал №_1_

1. (Метод ВКБ) Построить асимптотическое решение уравнения
$y'' + xy' + k^2x^2y = 0$ на отрезке $[0,1]$.

2. (Метод Крылова-Боголюбова) Найти асимптотику периодических решений уравнения
$\ddot{x} + 9x = \sin t + \varepsilon(x - x^3)$.

3. Уравнение $y'' + y = \varepsilon(1 - y^2)y'$, которое возникает при изучении автоколебательных систем, называют уравнением Ван-дер- ____ (впишите оставшуюся часть фамилии ученого с заглавной буквы в родительном падеже).

Описание технологии проведения

Промежуточная аттестация по дисциплине «Асимптотики решений дифференциальных уравнений» проводится в форме зачета.

По решению кафедры оценки за зачет могут быть выставлены по результатам текущей успеваемости обучающегося в течение семестра, но не ранее, чем на заключительном занятии. Для этого обучающемуся необходимо написать контрольную работу на оценку «зачтено», посетить не менее 80% занятий, активно работать на занятиях. При несогласии обучающегося, ему дается возможность пройти промежуточную аттестацию на общих основаниях.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра.

Промежуточная аттестация по дисциплине с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий (далее – ЭО, ДОТ) может проводиться на образовательном портале «Электронный университет ВГУ» (LMS Moodle, https://edu.vsu.ru/).

Обучающиеся, проходящие промежуточную аттестацию с применением ДОТ, должны располагать техническими средствами и программным обеспечением, позволяющим обеспечить процедуры аттестации. Обучающийся самостоятельно обеспечивает выполнение необходимых технических требований для проведения промежуточной аттестации с применением дистанционных образовательных технологий.

Идентификация личности обучающегося при прохождении промежуточной аттестации обеспечивается посредством использования каждым обучающимся индивидуального логина и пароля при входе в личный кабинет, размещенный в ЭИОС образовательной организации.

В ходе проведения аттестации обучающемуся необходимо ответить на вопросы КИМ, состоящего из двух теоретических и одного тестового вопросов, и дополнительные вопросы экзаменатора.

Результаты текущей аттестации обучающегося учитываются при проведении промежуточной аттестации следующим образом: обучающиеся, получившие за контрольную работу оценку «не зачтено» или не явившиеся на контрольную работу, получают дополнительное практическое задание или теоретический вопрос.

Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания

Критерии оценивания компетенций	Шкала оценок
Обучающийся не владеет основами учебно-программного материала, обнаружил пробелы в знаниях основного учебно-программного материала, допустил принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий, выполнил менее 50% заданий КИМ	«Не зачтено»
Обучающийся владеет знаниями основного учебно-программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по специальности, справился с выполнением заданий, предусмотренных программой, знаком с основной литературой, рекомендованной программой. Обязательным условием выставленной оценки является правильный ответ не менее, чем на 50% заданий КИМ.	"Зачтено"

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

ПК – 1 Способен решать задачи аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач математической гидродинамики

ПК – 1.1 Обладает большим объемом знаний в области математической гидродинамики

Знать: основные задачи в области обыкновенных дифференциальных уравнений, используемые при анализе задач для уравнений с частными производными, описывающими различные процессы гидродинамики

Уметь: использовать фундаментальные знания в построении и исследовании решений обыкновенных дифференциальных уравнений

Владеть: методами математического моделирования при анализе математических моделей физических и механических задач для их дальнейшего применения

ПК – 1.2 Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики

Знать: структуру научно-исследовательских работ, основы научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики

Уметь: определять тематику научного исследования

Владеть: методами научного исследования

ПК – 1.3 Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики

Знать: методы математического моделирования при анализе прикладных задач гидродинамики для их дальнейшего использования на практике

Уметь: представить собственные новые научные результаты

Владеть: различными способами построения асимптотик решений уравнений гидродинамики

ПКВ – 3 Способен осуществлять теоретическое обобщение научных данных и результатов экспериментов в моделях математической гидродинамики

ПКВ – 3.1 Обладает теоретическим аппаратом, необходимым для обобщения научных данных и результатов экспериментов в моделях математической гидродинамики

Знать: современные методы анализа дифференциальных уравнений, в том числе уравнений в частных производных и уравнений математической физики

Уметь: определять тематику научного исследования

Владеть: современными методами научного анализа моделей математической гидродинамики

ПКВ – 3.2 Умеет структурировать и обобщать научные и экспериментальные данные, четко формулировать и излагать необходимую информацию

Знать: современные методы проведения научных экспериментов, подходы к анализу научно-исследовательских работ,

Уметь: анализировать полученные результаты экспериментов, делать оптимально верные выводы и рекомендации

Владеть: современными методами научного анализа

ПКВ – 3.3 Имеет практический опыт обобщения подобной информации

Знать: существующие методы решения прикладных задач гидродинамики применительно к практической сфере деятельности

Уметь: оценивать различные подходы к решению прикладных задач гидродинамики, применять выбранный метод
Владеть: современными методами прикладного научного анализа

Перечень заданий для оценки сформированности компетенций
1) закрытые задания (тестовые, средний уровень сложности):

1. Метод Линдштедта - Пуанкаре для задачи

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)x, \quad x(0) = a,\, \dot{x}(0) = 0$$

дает следующий результат:

1) $x(t,\varepsilon) = a\cos\tau + O(\varepsilon^2)$,

2) $x(t,\varepsilon) = a\cos\tau - O(\varepsilon^2)$,

3) $x(t,\varepsilon) = a\cos\tau + \dfrac{\varepsilon a^3}{32}(\cos 3\tau - \cos\tau) + O(\varepsilon^2)$,

где $\tau = t(1 - \dfrac{4-3a^2}{8}\varepsilon + O(\varepsilon^2)),\ T = 2\pi + \dfrac{(4-3a^2)\pi}{4}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$.

Указать правильный ответ.

2. Метод Линдштедта - Пуанкаре для задачи $\ddot{x} + x = \varepsilon(\dot{x} + \dfrac{1}{3}\dot{x}^3),\ x(0) = a, \dot{x}(0) = 0$ дает следующий результат:

1) $x(t,\varepsilon) = 2\cos\tau + O(\varepsilon^2)$,

2) $x(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$,

3) $x(t,\varepsilon) = 2\cos\tau + \dfrac{\varepsilon}{12}(3\sin\tau - \sin 3\tau) + O(\varepsilon^2)$,

где $\tau = t(1 + O(\varepsilon^2)),\ T = 2\pi + O(\varepsilon^2)$.

Указать правильный ответ.

3. Метод Линдштедта - Пуанкаре для задачи $\ddot{x} + x = \varepsilon x^2, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0$ дает следующий результат:

1) $x(t,\varepsilon) = a\cos\tau + O(\varepsilon^2)$,

2) $x(t,\varepsilon) = a\cos\tau + \dfrac{\varepsilon a^2}{6}(3 + 2\cos\tau - \cos 2\tau) + O(\varepsilon^2)$,

3) $x(t,\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon a^2}{6}(3 + 2\cos\tau - \cos 2\tau) + O(\varepsilon^2)$,

где $\tau = t(1 + O(\varepsilon^2)),\ T = 2\pi + O(\varepsilon^2)$.

Указать правильный ответ.

4. Асимптотика решений уравнения $y'' + xy' + k^2x^2y = 0$ на отрезке $I = [a; b]$ при $k \to +\infty$ имеет вид

Варианты ответов:

1) $y_{1,2}=(k^2x^4+\frac{3}{2x^3}-\frac{1}{4x^4})^{-\frac{1}{4}}\sin t$,

2) $y_{1,2}=(-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4}+k^2x^2)^{-\frac{1}{4}}\exp\{-\frac{x^2}{4}\pm i\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{-\frac{1}{2}-\frac{t^2}{4}+k^2t^2dt}\}[1+\frac{\varepsilon_{1,2}(x,k)}{k}]$,

3) $y_{1,2}=(k^2x^4+\frac{3}{2x^3}-\frac{1}{4x^4})^{-\frac{1}{4}}\cos t.$,

Указать правильный ответ.

5. Какая замена используется для приведения уравнения $y''+\frac{1}{x^2}y'+k^2x^4y=0$ к виду $u''\pm Q(x)y=0$.

Варианты ответов:

1) $y(x)=u(x)e^{f(x)}+f(x)e^{u(x)}$

2) $y(x)=u(x)e^{f(x)}$

3) $y(x)=e^{u(x)-f(x)}$

4) $y(x)=e^{u(x)+f(x)}$

Указать правильный ответ.

6. Каково поведение решений уравнения $y''+\frac{1}{x^2}y'+k^2x^4y=0$ при $k\to+\infty$.

Варианты ответов:

1) $y_{1,2}=(k^2x^4+\frac{3}{2x^3}-\frac{1}{4x^4})^{-\frac{1}{4}}\exp\{\frac{1}{2}x\pm i\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{k^2t^4+\frac{3}{2t^3}-\frac{1}{4t^4}dt}\}$

2) $y_{1,2}=\exp\{\frac{1}{2}x\pm i\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{k^2t^4+\frac{3}{2t^3}-\frac{1}{4t^4}dt}\}[1+\frac{\varepsilon_{1,2}(x,k)}{k}]$

3) $y_{1,2}=(k^2x^4+\frac{3}{2x^3}-\frac{1}{4x^4})^{-\frac{1}{4}}\exp\{\frac{1}{2}x\pm i\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{k^2t^4+\frac{3}{2t^3}-\frac{1}{4t^4}dt}\}[1+\frac{\varepsilon_{1,2}(x,k)}{k}]$

4) $y_{1,2}=(k^2x^4+\frac{3}{2x^3}-\frac{1}{4x^4})^{-\frac{1}{4}}\exp\{\pm i\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{k^2t^4+\frac{3}{2t^3}-\frac{1}{4t^4}dt}\}[1+\frac{\varepsilon_{1,2}(x,k)}{k}]$

Указать правильный ответ.

7. Какова используется замена для приведения уравнения $y''+(5x-4)y'+k^2(1-x)(x+2)y=0.$ к виду $u''\pm Q(x)y=0$.

Варианты ответов:

1) $y(x)=u(x)f(x)$

2) $y(x)=u(x)e^{f(x)}$

3) $y(x)=f(x)e^{u(x)}$

4) $y(x)=e^{u(x)+f(x)}$

Указать правильный ответ.

8. Каково поведение решений уравнения $y''+(5x-4)y'+k^2(1-x)(x+2)y=0.$ при $k\to+\infty$.

Варианты ответов:

1) $$y_{1,2}=\exp\{\frac{1}{2}(4x-\frac{5x^2}{2}\pm \pm\int_{x_0}^{x}\sqrt{26-40t+25t^2+4k^2(t^2+t-2)}dt)\}[1+\frac{\varepsilon_{1,2}(x,k)}{k}].$$

2) $$y_{1,2}=\sqrt{2}(26-40x+25x^2+4k^2(x^2+x-2))^{-\frac{1}{4}}\exp\{\frac{1}{2}(4x-\frac{5x^2}{2}\pm \pm\int_{x_0}^{x}\sqrt{26-40t+25t^2+4k^2(t^2+t-2)}dt)\}[1+\frac{\varepsilon_{1,2}(x,k)}{k}].$$

3) $$y_{1,2}=\sqrt{2}(26-40x+25x^2+4k^2(x^2+x-2))^{-\frac{1}{4}}\pm \pm\exp\{\int_{x_0}^{x}\sqrt{26-40t+25t^2+4k^2(t^2+t-2)}dt)\}[1+\frac{\varepsilon_{1,2}(x,k)}{k}].$$

<u>2) открытые задания (тестовые, средний уровень сложности):</u>

1. Вставьте пропущенное существительное в родительном падеже
Метод приближенного решения задач теоретической физики, применимый в том случае, когда в задаче присутствует малый параметр, причём в пренебрежении этим параметром задача имеет точное решение, называется теорией __________.

2. Решение уравнения $y''-xy=0$, имеющее вид

$$\mathrm{Ai}(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}x^{-1/4}\exp[-(2/3)x^{2/3}][1+O(x^{-3/2})]$$

Называется функцией ________ (впишите фамилию ученого с заглавной буквы).

3. Уравнение $y''+(x^2-a^2)y=0,\ a\ge 0$ называется уравнением __________ (впишите фамилию ученого с заглавной буквы в родительном падеже).

4. Уравнение $y''+y-2\varepsilon y^3=0$, где $\varepsilon>0$ - малый параметр, характеризующий степень нелинейности системы, называется уравнением ________ (впишите фамилию ученого с заглавной буквы в родительном падеже).

5. Уравнение $y''+y=\varepsilon(1-y^2)y'$, которое возникает при изучении автоколебательных систем, называют уравнением Ван-дер- ____ (впишите оставшуюся часть фамилии ученого с заглавной буквы в родительном падеже).

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

<u>1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):</u>

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

<u>2) Задания открытого типа (короткий текст):</u>

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.